



Dérivation — Exercices d'approfondissement

1ère Bac · Dérivation

Série 2 — dérivées, tangentes et coût marginal.

Exercice 1

Calculer la dérivée de :

1. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x - 1$

2. $g(x) = (2x + 3)(x - 5)$

3. $h(x) = \frac{3x - 1}{x + 4}$

Correction

1. $f'(x) = 12x^2 - 4x + 7.$

2. $g'(x) = 2(x - 5) + (2x + 3) = 4x - 7.$

3. $h'(x) = \frac{3(x + 4) - (3x - 1)}{(x + 4)^2} = \frac{13}{(x + 4)^2}.$

Exercice 2

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 4.

Correction

$f(4) = -3$ et $f'(x) = 2x - 6$, donc $f'(4) = 2$. La tangente a pour équation $y = 2(x - 4) - 3 = 2x - 11$.

Exercice 3

Le coût total est $C(x) = 0,5x^2 + 20x + 300$.

1. Calculer le coût marginal $C'(x)$.
2. Calculer le coût marginal pour $x = 40$ et l'interpréter.

Correction

1. $C'(x) = x + 20.$

2. $C'(40) = 60$ dh : produire la 41^e unité coûte environ 60 dh.

Exercice 4

Avec le coût précédent et un prix de vente unitaire de 80 dh :

1. Exprimer le bénéfice $B(x)$.
2. Déterminer la production qui maximise le bénéfice.

Correction

1. $B(x) = 80x - 0,5x^2 - 20x - 300 = -0,5x^2 + 60x - 300$.
2. $B'(x) = -x + 60$ s'annule en $x = 60$ en changeant de signe : le bénéfice maximal vaut $B(60) = 1\,500$ dh.

Exercice 5

Montrer que le bénéfice est maximal lorsque le coût marginal égale le prix de vente.

Correction

$B(x) = px - C(x)$, donc $B'(x) = p - C'(x)$. $B'(x) = 0$ équivaut à $C'(x) = p$: le coût marginal égale le prix unitaire.

Exercice 6

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Calculer f' et déterminer le minimum.

Correction

$f(x) = x + \frac{4}{x}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$. f' s'annule en 2 en changeant de signe : le minimum vaut $f(2) = 4$.

Exercice 7

Le coût moyen est $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ avec $C(x) = x^2 + 100$. Déterminer la production qui minimise le coût moyen.

Correction

$C_m(x) = x + \frac{100}{x}$, donc $C'_m(x) = 1 - \frac{100}{x^2}$, qui s'annule en $x = 10$. Le coût moyen minimal vaut $C_m(10) = 20$.