

1ÈRE BAC SCIENCES ÉCONOMIQUES · LEÇON 1

Notions de logique

Propositions · Quantificateurs · Raisonnements

Ce que nous allons apprendre

- Propositions et connecteurs
- Tables de vérité
- Quantificateurs et négations
- Contraposée et absurde
- Contre-exemple
- Récurrence

La table complète

P	Q	$P \text{ et } Q$	$P \text{ ou } Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

À RETENIR

Une implication n'est fausse que si P est vraie et Q fausse.

Trois formes équivalentes

ÉQUIVALENCES

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{P} \text{ ou } Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

NÉGATION

$\overline{P \Rightarrow Q}$ s'écrit « P et $\overline{Q}$ » : ce n'est plus une implication.

DE MORGAN

$\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$.

Nier correctement

Proposition	Négation
$(\forall x) P(x)$	$(\exists x) \overline{P(x)}$
$(\exists x) P(x)$	$(\forall x) \overline{P(x)}$
$(\forall x)(\exists y) P$	$(\exists x)(\forall y) \overline{P}$

EXEMPLE CONCRET

« Tous mes produits coûtent moins de 100 dh » se nie en « il existe un produit à 100 dh ou plus ».

Retourner l'implication

Énoncé. Si $3n + 2$ est impair, alors n est impair.

- 1 Contraposée : n pair $\Rightarrow 3n + 2$ pair.
- 2 $n = 2k$ donne $3n + 2 = 2(3k + 1)$, pair.
- 3 La contraposée est vraie, donc l'énoncé l'est aussi.

Supposer le contraire

Énoncé. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.

- 1 Soient $r \in \mathbb{Q}$ et x irrationnel ; supposons $r + x$ rationnel.
- 2 Alors $x = (r + x) - r$ serait une différence de rationnels.
- 3 Donc x serait rationnel : **contradiction**.

Réfuter en une ligne

PRINCIPE

Pour montrer qu'un « pour tout » est faux, un **seul** cas suffit.

EXEMPLE

« Pour tout réel x , $\frac{1}{x}$ existe » est fausse : $x = 0$ est un contre-exemple.

DISSYMMÉTRIE

Réfuter demande un cas ; **prouver** demande un raisonnement général.

Trois étapes

- 1 **Initialisation** au premier rang.
- 2 **Hérédité** : du rang n au rang $n + 1$.
- 3 **Conclusion** pour tout n .

EXEMPLE

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 : \text{l'hérédité découle de}$$
$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

APPLICATION 1

Une inégalité

Énoncé. Montrer que $3^n \geq 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ➊ $n = 0 : 1 \geq 1 \checkmark$.
- ➋ Si $3^n \geq 2n + 1$, alors $3^{n+1} \geq 6n + 3$.
- ➌ Et $6n + 3 \geq 2n + 3 = 2(n + 1) + 1$: hérédité acquise.

Un raisonnement commercial

Énoncé. « Si un client achète en gros, il bénéficie d'une remise. » Un client n'a pas de remise : que conclure ?

- 1 On applique la **contraposée**.
- 2 Pas de remise $\Rightarrow$ il n'a pas acheté en gros.
- 3 Attention : avoir une remise ne prouve **pas** l'achat en gros (la réciproque peut être fausse).

L'essentiel de la leçon

Objectif	Outil
Nier une implication	P et $\overline{Q}$
Nier un quantificateur	échanger $\forall$ et $\exists$
Implication difficile	contraposée
Réfuter	contre-exemple
Propriété sur tout n	récurrence